Ms 5097/6. Eötvös Loránd mennyiségtani
egyetemi jegyzetei

I_Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes in Folge der Schwerkraft.

1. Grundbegriffe.-

Kraft ist die Ursache der Bewegung, und Bewegung ist das Resultat der Kraft. - Eine nähere Definition zu geben wäre ~~ebenso~~ schwer wie unnütz, genug wir unterscheiden zwischen den Kräften, ~~stetig~~ momentan und stetig wirkende Kräfte. - Diesem Unterschiede der Ursachen entspricht auch ein Unterschied der Resultaten; und wir unterscheiden ~~eine~~ ~~die~~ eine gleichförmige und eine beschleunigte Bewegung. Denken wir uns einen materiellen Punkt, welcher sich in gerader Linie gleichförmig bewegt; bezeichnen wir dann diese stets constant bleibende Geschwindigkeit mit v und die Strecke welche der Punkt mit dieser Geschwindigkeit fortschreitend in der Zeitdauer t zurücklegt mit x, so ist

$$v = \frac{x}{t}$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung, ist schon ihrem Begriffe nach die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten, also in verschiedenen Stellen der Bahn eine verschiedene – es wird aber immerhin noch möglich sein dieselbe in einem unendl. kleinen Intervalle als Constant anzunehmen. – Ist dt ein unendlich kleiner Zuwachs von t, und x ~~die~~ in ~~diser~~ der Zeit (t) zurückgelegte Strecke, also dx die in der Zeit dt zurückgelegte Strecke, so ergiebt sich die Geschwindigkeit:

(2) .... $v = \frac{dx}{dt}$

d. i. Die Geschwindigkeit ist gleich dem Diff. Quot. der durchlauffenen Strecke nach der Zeit. – Je nachdem x ~~im~~ ~~mit~~ bei Zuwachs der Zeit, zu oder abnimmt wird v positiv oder negativ. – Da bei der Bewegung in folge einer stätig wirkenden Kraft der Zuwachs der Geschwindigkeit in jeden gleichen Zeitelementen, derselbe ist; d. i. da die Geschwindigk. mit der Zeit proportional wächst ~~ist~~, so ~~muss~~ ist v eine lineare Function von t; und wir erhalten diesen Zuwachs an Geschwindigkeiten, in dem Zeit-

dt, durch Differentiation v-s nach t; so dass

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

b ist die Beschleunigung; d. i. der Zuwachs an Geschwindigkeit im Zeitelemente dt. – Sie ist im Falle der gleichförmigen Bewegung, wo also: v = Const. gleich 0. – Der Fall wenn b einen Constanten Werth hat, ist der, wenn auf den ~~Punkt~~ Masse eine constante Kraft wirkt, ~~mit~~ dieser ~~Fall~~ verwirklicht sich bei allen ~~Erscheinungen~~ Wirkungen der Schwere.

Wir werden im Folgenden die Ausdrücke bewegende und beschleunigende Kraft gebrauchen – der erste derselben ist durch die Gleichung definirt:

$$X = mb$$

also der zweite

$$b = \frac{X}{m}$$

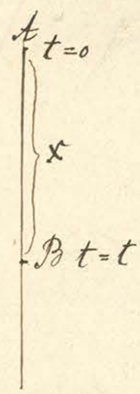
wo X die bewegende, b die beschleunigende Kraft und $\underline{m}$ die Masse des bewegten Körpers oder Punktes bedeutet. – Demnach ist die beschleunigende Kraft die auf die Masseneinheit wirkende bewegende Kraft. – Der Name beschleunigende

Kraft beruht auf die ~~Identität~~ Gleichheit derselben mit der Beschleunigung selbst. – Dieser unklar erscheinende Begriff der Gleichheit dieser zwei heterogenen Grössen, erhellt sich wenn man bedenkt dass eine Kraft gleich zu setzen ist dem Producte der Masse auf welche es wirkt und der in einer best. Zeit zurückgelegten Strecke – dieses Product ist aber, wenn die Masse 1 und die best. Zeit unendlich klein ist die Beschleunigung. ~~Die K~~

2. Der freie Fall und der verticale Wurf. –

Die bewegende Kraft eines freifallenden Körpers ist sein Gewicht – die beschleunigende Kraft ist bei dieser Bewegung gleich dem Verhältnisse des Gewichtes des fallenden Körpers zu seiner Masse; sie ist also gleich der Schwere. –

Die Erfahrung lehrt dass das Gewicht eines mat. Punktes oder Körpers, ~~const.~~ unabhängig von Zeit und Raum, also constant, ~~dann~~ weiter dass das Verhältniss zwischen Gewicht und Masse bei den verschiedensten Körpern dasselbe ist. – Demnach ist die Schwere eine Constante Kraft, gleich gross für ruhende und bewegte Körper. –



B. Ein materieller Punkt soll zur Zeit $t=0$, mit der Geschw. 0 zu fallen beginnen, zur Zeit $t=t$, nachdem er die Strecke x durchgelaufen, befinde er sich in b. – Seine Geschw. ergiebt sich aus

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Die einzige bewegende Kraft ist in diesem Falle die beschleunigende Kraft, also die Schwere, und demnach ist.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g$$

$$dv = g\,dt$$

$$v = gt + C$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich wenn wir hierin $t=0$ setzen, dann ist der Annahme nach $v=0$ und folglich $C=0$; so dass:

$$\underline{v = gt} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die Gl. spricht aus dass: die Geschwindigkeit mit der Fallzeit direct proportional ist

Es ist weiterhin:

$$dx = gt\,dt$$

integrirt:

$$x = g\frac{t^2}{2} + C$$

Gesetzt für $t=0$, also auch $x=0$ folgt $C=0$

(4) .... $x = g\frac{t^2}{2}$

Wonach der Fallraum proportial mit dem Quadrate der Fallzeit ist.

Das Resultat der Experimente ist, für $t = 1^{sec}$ und für die Längeneinheit $= 1^{meter}$, näherungsweise folgendes,

$$g = 9,8$$

~~Von wie grossem Einfluss die~~ Dieselbe Grösse g ist für 1^{meter} als Längeneinh. und 1^{min} Zeiteinh. $= 35280$

Die zwischen v, g, t, x bestehenden Relationen können in Folge von (3) und (4), noch durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

t und x durch v u. g: $t = \frac{v}{g}$ $\quad x = \frac{v^2}{2g}$

v und t durch g u. x: $v = \sqrt{2gx}$ $\quad t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$

Ein Fall von etwas allgemeinerer Bedeutung ist der dass zur Zeit $t=0$ die Geschwindigkeit v nicht $=0$; es ist dies der Fall des verticalen Wurfes, gleichviel ob diese aufwärts oder abwärts gerichtet ist.

$$\frac{dx}{dt}=v$$

und

$$\frac{dv}{dt}=g$$

durch Integration folgt:

$$v=gt\pm c \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

wo c die Integrationsconstante für $t=0$ nicht mehr verschwindet, sondern den Werth der Geschwindigkeit annimmt, mit welcher es in A fortgeschleudert wurde; geschah dies gegen den Mittelpunkt der Erde so ist das obere, im entgegengesetzten Sinne das untere Vorzeichen zu nehmen.

Durch ~~zwei~~ nochmalige Integration ist:

$$x=\frac{g}{2}t^2\pm ct+C'$$

C' ist gleich 0 zu setzen da für $t=0$ auch $x=0$ also:

$$x=\frac{g}{2}t^2\pm ct \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

Wird nun der Mat. Punkt zur Zeit $t=0$ vertical aufwärts geworfen, dann bewegt er sich so lange aufwärts bis seine Geschwindigkeit $v=0$ ist, und

und verändert in diesem Augenblicke ~~wieder~~ ihre Bewegungsrichtung indem sie sich dem Mittelpunkte der Erde zuwendet. –

Die Zeit in der $v=0$ ist also der Punkt die grösste Höhe erreicht hat ist aus (5)

$$t=\frac{c}{g}$$

und die Zeit in der der Punkt wieder in der ursprünglichen Lage, für welche $t=0$, angelangt ist aus (6)

$$t=\frac{2c}{g}$$

Der Körper braucht also ebenso viel Zeit um bis zur grösten Höhe zu steigen, als von da hinunter zu fallen – also steigt auch ~~der~~ ein vertical aufwärts geworfener Körper in derselben Zeit zu einer gewissen Höhe; als er braucht um von dieser frei fallend wieder die ursprüngliche Lage zu erreichen. –

In welchem Punkte erreicht der Körper die ursprüngl. Geschw. – Diese ist c also dies in (5) gesetzt

$$c=gt-c \quad \text{hieraus} \quad t=\frac{2c}{g}$$

und

$$x=\frac{g}{2}\cdot 4\frac{c^2}{g^2}-2\frac{c^2}{g}=0$$

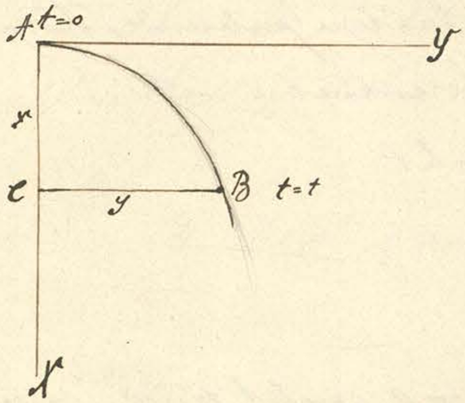
der von A ~~auf~~ mit der Geschw. c aufwärts geworfene Körper kommt also mit derselben Geschw. in A zurück. –

Es kann uns noch die grösste erreichte Höhe interessiren, – diese ist in (6), ~~für~~ gesetzt $t = \frac{c}{g}$

$$-x = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{g} + \frac{c^2}{g} = \frac{c^2}{2g}$$

3. Der horizontale Wurf. –

Es soll nun der Körper zur Zeit $t=0$ in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit c fortgeschleudert werden, – Die Bewegung des Körpers ist



dann ein Resultat dieser momentanen Kraft, und der stetig wirkenden Schwere, die Bahn ist eine Curve, und zwar eine ebener Krümmung. – ~~Nehmen~~ Legen wir die X Axe des rechtw. Coordinatensystems in die Richtung der Schwerkraft, so sind die Componenten der ~~in der Richtung~~, ~~bewegenden Kraft, welche in diesem Falle nur die~~ Beschleunigung ~~ist~~, nach den Coord. Axen:

u. zwar nach der X Axe $\frac{d^2x}{dt^2} = g$

und nach der Y Axe $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$

Die einzige einwirkende beschleunigende Kraft ist ja in diesem Falle nur eben die Schwere. –

Die Componenten der Geschwindigkeit ergeben sich durch Integration

$$\frac{dx}{dt} = gt + C$$

da aber für $t = 0$ die Geschwindigkeit in der X Richtung $= 0$, so ist.

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

und

$$\frac{dy}{dt} = c$$

wo c die zur Zeit $t = 0$ erhaltene Geschw. des Körpers in horizontaler Richtung bezeichnet. –

Eine zweite Integration giebt:

$$(7)\quad \begin{cases} x = \frac{g}{2}t^2 \\ y = ct \end{cases}$$

wo die Integr. Constanten $= 0$ gesetzt sind, da sich dieser Werth aus den integrirten Gleichungen für $t = 0$ also auch $x = 0$ und $y = 0$ wirklich ergiebt. –

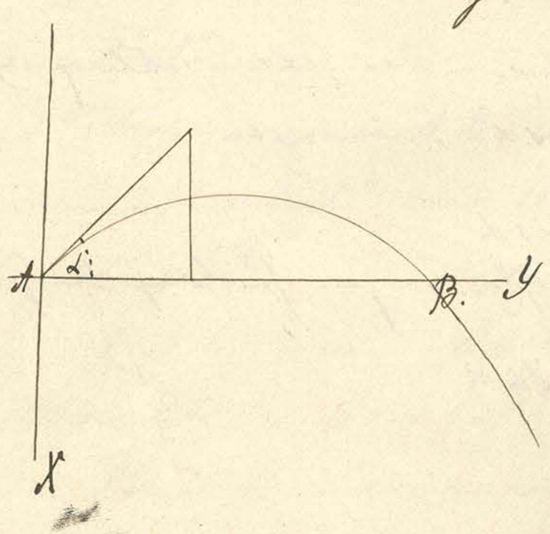
Es fragt sich nun welche ist die Gl. der Bahn? – es ergiebt sich diese durch Elimination von t aus (7)

$$y^2 = x\cdot\left(\frac{2c^2}{g}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Es ist dies die Gleichung einer Parabel deren Axe mit der X^{te} Axe zusammen fällt, deren Parameter $\frac{2c^2}{g}$, und deren Scheitelpunkt der Anfangspunkt der Coord., und somit der Punkt von welchem der Körper zur Zeit $t=0$ horizontal fortgeschleudert wurde.–

Zur Zeit $t=\frac{c}{g}$, wo die senkr. Geschw. gleich der horizontalen Geschw. ist, die Bahn also 45° gegen die Horizontale geneigt ist, befindet sich der Körper in dem Punkte, welcher mit dem Brennpunkte in einer Horizontalen liegt.–

4. Der schräge Wurf.–



Es soll der Punkt A zur Zeit $t=0$ mit der Geschw. c in der Richtung fortgeschleudert worden, welche mit der

Horizontalen ~~den~~ Winkel α bildet; der Körper wird in einer krummen Bahn empor steigen und wird dann in Folge der Schwere zu fallen beginnen. –
Sind x und y die Coord. ~~der Körperpunkte~~ Punktes der Bahn in welcher sich der Körper zur Zeit t befindet, so ~~ist~~ sind die Comp. der Beschleunigung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Die Comp. der Geschw. ergeben sich durch Integration

$$\frac{dx}{dt} = gt + C'$$

$$\frac{dy}{dt} = C''$$

Für $t=0$ ist die Comp. der Geschwindigkeit in der Richtung der ~~Component~~ x Coord., $\frac{dx}{dt_{(0)}} = c\sin\alpha$ und demnach
~~also~~ $C' = -c\sin\alpha$

Die Comp. der Geschw. in der Axenrichtung y ist für $t=0$, $\frac{dy}{dt_0} = c\cos\alpha$, und daher

$$C'' = c\cos\alpha$$

also sind die zwei Gleichungen für Comp. der Geschw.

$$\frac{dx}{dt} = gt - c\sin\alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = c\cos\alpha$$

Durch weitere Integration:

$$x = \frac{g}{2}t^2 - c\sin\alpha t + C_1$$

$$y = c\cos\alpha . t + C_2$$

In Folge dass für $t=0$ auch $x=0$ und $y=0$, ist C_1 sowohl als $C_2 = 0$ zu setzen, und wir haben

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{g}{2}t^2 - c\sin\alpha t \\ y &= c\cos\alpha . t \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

Um die Gleichung der Bahn zu kennen muss man aus diesen Gleichungen t eliminiren; so ergibt sich:

$$x = \frac{g}{2}\frac{y^2}{c^2\cos^2\alpha} - y\,tg\,\alpha. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Es ist dies die Gleichung einer Parabel, deren Axe mit der Verticalen zwar nicht zusammenfällt jedoch parallel ist. –

Ist die Horizontale AB eine feste Ebene, so haben wir einen Fall vor Augen, der oft verwirklicht wird, – uns interessirt dann AB. die Wurfweite, und die Wurfhöhe, zugleich Scheitelpunkt der Parabolischen Bahn. –

Für den Punkt B in welchem der Körper auf die Horizontale zurückfällt ist $x=0$ also, Gl. (10)

$$0 = \frac{g}{2} \cdot \frac{1}{c^2 \cos^2\alpha} - tg\alpha$$

Dieser Gleichung genügt sowohl $y=0$ als

$$y = AB = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$

AB ist die Wurfweite. –

Die Coordinaten des Scheitels ergeben sich nun hieraus mit Leichtigkeit und zwar ist für den Scheitelpunkt,

$$y_s = \frac{AB}{2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

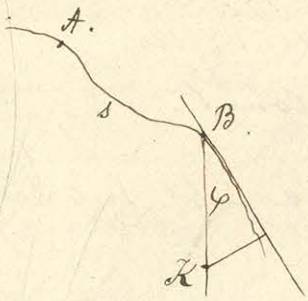
und wenn dieser Werth in (10) gesetzt wird:

$$x_s = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Aus der Gleichung für die Wurfweite erklärt es sich dass ~~Da~~ sie ein Maximum wird für $\alpha = 45°$. –

5. Bewegung des Massenpunktes auf einer bestimmten Linie. –

An die Spitze stellen wir einen allgemeinen Satz der Mechanik. –



Bewegt sich ein materieller Punkt nur in Folge einer beschleunigenden Kraft, auf einer beliebigen Curve, – die er aber nicht verlassen kann – und bezeichnen wir den in der Zeit t durchlaufenen Bogen AB mit s, so ist

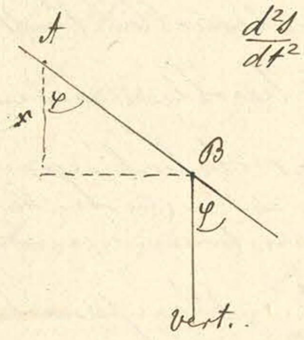
$\frac{ds}{dt}$ = die Geschwindigkeit in B.

$\frac{d^2s}{dt^2}$ = die Beschleunigung in B

die Mechanik spricht nun den Satz aus, dass bei einer solchen Bewegung, die Beschleunigung in einem Punkte $\underline{B}$ der Bahn, gleich ist der Componente der beschleunigenden Kraft nach der Richtung der Tangente in B; dass also wenn φ der Winkel zwischen Tangente und Richtung der Kraft.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = K\cos\varphi$$

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass ein schwerer Punkt sich in Folge der Schwere auf einer ~~ge~~ bestimmten Gerade, etwa auf einer schiefen Ebene bewegt. – Es ist dann nach dem ausgesprochenen Satze:



$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.\cos\varphi$$

ferner ist $\varphi = \mathrm{Const.}$

Durch Integration ergiebt sich die Geschwindigkeit:

(11) ...... $v = \frac{ds}{dt} = g.\cos\varphi . t$

wo die Integrationsconstante unter der Annahme $=0$ gesetzt werde dass für $t=0$ auch $v=0$, dass also der Körper zur Zeit $t=0$ ohne Kraft zu fallen begann. -

Die ~~ferner~~ nochmalige Integr. giebt.

(12) .... $s = \frac{g.\cos\varphi}{2} t^2$

Wobei angenommen war, dass auch $s=0$ für $t=0$

Eliminirt man t aus (11) und (12), so folgt:

(13) .... $v^2 = 2g.\cos\varphi . s$

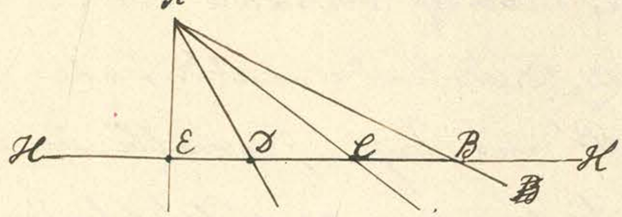
Bezeichnen wir die Tiefe um welche der Punkt in der Zeitdauer t gesunken ist mit x so ist offenbar

$$x = s\cos\varphi$$

und daher

(14) .... $v^2 = 2gx$

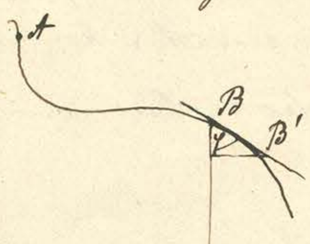
Diese Gleichung spricht den Satz aus, dass, welches auch die ~~Bahn~~ Richtung der geradlinigen Bahn sei, auf welcher sich der Punkt bewegt, seine Geschwindigkeit dieselbe ist wenn er um dieselbe Höhe gesunken ist; dass ist die von A auf den Geraden ~~abfallen~~-



AB, AC, AD etc abfallenden Körper haben alle dieselbe Geschwindigkeit, wenn sie in der Horizontale HH, also in den Punkten B ~~resp~~, C, D, etc angelangt sind. —

Dieser für geradlinige bedingte Bahnen ausgesprochene Satz lässt sich auch für bedingte Bahnen auf beliebige Curven nachweisbar. —

Es sei nämlich die Linie auf welcher sich der Punkt bewegt, eine Linie irgend welcher Gestalt.



Der zur Zeit $t=0$ von herabfallende Körper sei auf der Curve zur Zeit t bis B angelangt; nennen wir dann den Bogen $AB = s$, und den Winkel zwischen Tangente in B, und der Richtung der Schwerkraft φ, so ist nach dem auf Seite 15 ausgesprochenem Satze

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.\cos\varphi$$

der Unterschied mit dem Falle der Geradl. vorgeschriebenen Bahn ist der Dass φ variable ist. – ~~Nehmen~~ Fassen wir noch einen zweiten unendl. nahe zu B gelegenen Punkt B' ins Auge; derselbe wird auch in der Tangente liegen, und es entsteht ein unendl. kleines Dreieck, worin wenn $BB' = ds$ so $BC = dx$ und $B,C = dy$; also:

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$$

dies oben eingesetzt:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.\frac{dx}{ds}$$

Ohne darauf Rücksicht zu nehmen ob die Gleichung der Curve bestimmt ist oder nicht, können wir in unseren Folgerungen weiter gehen. – Gesetzt

$$v = \frac{ds}{dt}$$

ist

$$\frac{dv}{dt} = g.\frac{dx}{ds}$$

also:

$$\frac{ds}{dt}\cdot dv = g\,dx$$

oder

$$v\,dv = g\,dx$$

Wir haben hier an beiden Seiten der Gleichung ein vollständiges Differential; deren Integral:

$$v^2 = 2gx + C$$

Wird x von dem Anfangspunkte A gezählt, so ist für $x=0$ auch $v=0$, folglich $C=0$, und es ist:

$$v^2 = 2gx$$

Es ist dies die Gleichung (14) welche wir in Bezug auf die Bewegung auf einer bedingten Geraden aufstellten; sie und der auf sie gegründete Satz bestehen also auch in Bezug auf eine beliebige Curve. –

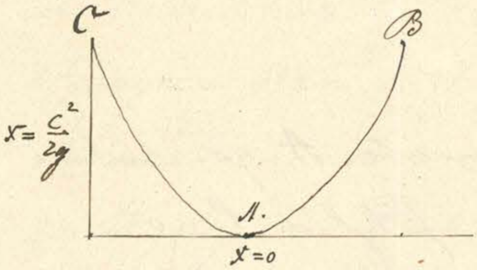
Ist die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit $t=0$, von 0 verschieden etwa $=c$, dann gestaltet sich die Gleichung (14):

$$v^2 = 2gx + c^2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Die grösste erreichte Höhe ist offenbar der Werth den $(-x)$ annimmt, wenn $v=0$; dieser ~~Werth~~, ist:

$$=\frac{c^2}{2g}$$

Diese Höhe ist von allen Bedingungen der Bahn unabhängig sie ist dieselbe, wie die beim verticalen Wurfe. – (S. Seite 9.)



Dieser letzt betrachtete Fall tritt bei der Bewegung eines Punktes auf einer zweiarmigen krummen Bahn ein – Nehmen wir z. B. an dass der Punkt zur Zeit $t=0$ vom Punkte A ($x=0$) mit der Geschwindigkeit c gegen B geschleudert werde, er wird dann steigen so lange bis seine Geschwindigkeit $v=0$, hat dann seine grösste Höhe

$$x=\frac{c^2}{2g}$$

und fängt an zu sinken. – Seine Geschw. im Punkte A($x=0$) wird wieder $v=c$ sein; und dann steigt er gegen C hinauf, wiederum so lange als $v=0$ und die erreichte Höhe $=\frac{c^2}{2g}$; von C geht es durch A wieder nach B u. s. w. – Hiebei setzte ich die Zeichen von c und x verschieden, und dies ist ganz gerechtfertigt. – Die Geschwindigkeit bei dieser Bewegung ist am Grössten im tiefsten Punkte, von da empor steigend nimmt sie allmälig ab. –

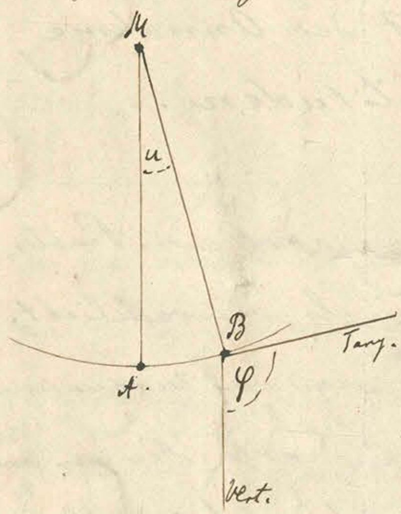
II. Das Pendel. —

1. Das einfache Pendel, mit der Annahme unendlich kleiner Amplituden. —

Die ~~von~~ zuletzt behandelte Bewegungsart eines Punktes, ist bei den Schwingungen eines Pendels verwirklicht. Wir unterscheiden das einfache und das zusammengesetzte Pendel; bei ersteren sind alle Dimensionen ausser der Länge unendl. klein, ~~beim bei~~ das letztere ist ein Pendel wie es in der Wirklichkeit verfertigt werden kann. — Ein materieller Punkt an einem masselosen Faden aufgehängt ist demnach ein einfaches Pendel; derselbe hat natürl. eine Drehungsaxe, welche durch den Aufhängepunkt hindurchgeht. —

Es sei $MA = l$ die Länge des Pendels, welches sich zur Zeit $t=0$, in ihrer Gleichgewichtslage, also in der Verticalen befindet, Zur Zeit $t = t$ sei ~~ihre~~ Lage MB

welche mit der Gleichgew. Lage den Winkel u bildet, Wir bezeichnen den Winkel zwischen der Tangente der Bahn in B und der Verticalen, mit φ, den Bogen AB mit s, und haben somit nach I, 5 die Gleichung:



$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.\cos\varphi$$

es ist

$$\varphi = 90^\circ + u$$

also

$$\cos\varphi = -\sin u$$

und

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g.\sin u$$

Es ist aber s proportional mit lu, und wenn wir die Einheit $\frac{180}{\pi}$ für den Winkel u einführen:

$$s = lu$$

Hieraus folgt dann

$$(1) \ldots\ldots \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin u$$

Es besteht nun die Reihe

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7} + \ldots$$

Die Amplitude ist der grösste Werth von u, bei einer Schwingung des Pendels; wir machten die Voraussetzung, dass diese unendlich klein sei; dann verschwinden aus dieser Reihe all' die Glieder welche höhere Potenzen von u enthalten, es ist daher

$$\sin u = u$$

zu setzen; daher

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{g}{l}u$$

Zur Vereinfachung setze ich $\frac{g}{l} = \lambda^2$, da $\frac{g}{l}$ eine wesentlich positive Grösse ist, multiplizire diese Gleichung mit du, und erhalte dann

$$\frac{du}{dt} \cdot d\frac{du}{dt} = -\lambda^2 u du$$

Durch Integration dieser Gleichung, ergiebt sich:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = -\lambda^2 u^2 + C$$

Wie bereits bemerkt ist die Amplitude das Maximum von u, nennen wir sie $\underline{a}$; so ist offenbar für $u=a$ $\frac{du}{dt} = 0$, und daher:

$$C = \lambda^2 a^2$$

also:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \lambda^2(a^2 - u^2)$$

weiter hin

$$\frac{du}{dt} = \lambda\sqrt{(a^2-u^2)}$$

die Integration dieser Gleichung ist von keiner besonderen Schwierigkeit, es ist dies:

$$\lambda dt = \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

also:

$$\lambda t = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

Gesetzt $u = ax$ ist

$$\lambda t = \cancel{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\lambda t = \arcsin \frac{u}{a}$$

wo die Integr. Constante $= 0$ gesetzt ist; denn dieser Werth ergiebt sich für ihn, gesetzt in der Gleichung $t=0$ wodurch auch $u=0$

Wir können auch schreiben

$$\frac{u}{a} = \sin \lambda t$$

(2) ...... $u = a . \sin \lambda t$.

Dass diese Gleichung wirklich das Integral vorstellt, ist, ~~ist~~ wird leicht begreiflich, wenn man ihren 2ten Diff. Coefficienten bildet:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = - \lambda^2 a \sin \lambda t$$

und den Werth $a \sin \lambda t = u$ einsetzt.-

Rechnet man die Zeit nicht vom ~~Ruhepunkte~~ dem Gleichgewichts zustande des Pendels, so wird die Gleichung (2) eine etwas andere Gestalt annehmen, indem sie noch mit einem Constanten Gliede behaftet sein wird, welcher der Werth von u für $t=0$ ist.-

Wir suchen nun die Zeitpunkte in welchen u ein Maximum oder Minimum wird; und zwar ist das Maximum $u = a$, und das Minimum $u = -a$

Es wird $u = a$ wenn $\sin \lambda t = 1$ also $\lambda t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\ldots$

" " $u = -a$ " $\sin \lambda t = -1$ " $\lambda t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots\ldots$

Also der schwere Punkt des Pendels an den einen Ende seiner Bahn angelangt in den Zeiten $t = \frac{\pi}{2\lambda}, \frac{5\pi}{2\lambda}, \ldots\ldots$ und an dem anderen Ende in $t = \frac{3\pi}{2\lambda}, \frac{7\pi}{2\lambda}, \ldots\ldots$

Die Zeitdauer in welcher das Pendel von dem einen Ende seiner Bahn zum anderen anlangt, ist seine Schwingungsdauer, wir sehen aber dass diese immer $= \frac{2\pi}{2\lambda}$ ist; bezeichnen wir also die Dauer einer einfachen Schwingung des Pendels mit T, so ist

$$T = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Die Schwingungsdauer eines Pendels ist also im Falle von unendlich kleinen Schwingungen unabhängig von der Amplitude. – Wäre es möglich die Schwingungsdauer eines Pendels ~~für~~, ~~bei~~ mit unendlich kleiner Amplitude zu messen, so ergebe sich aus diesen Beobachtungen:

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$$

2. Die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, wenn ihre Amplitude endlich ist. –

Gleichung (1, leiteten wir ohne irgend welche Voraussetzung über die Ordnung der Ampl. Grösse ab; diese Gleichung kann ~~zu~~ die Form annehmen:

$$\frac{du}{dt}\cdot d\frac{du}{dt} = -\lambda^2 \sin u\, du$$

durch Integration

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\lambda^2 \cos u + C$$

Für das Maximum von u, welches a, die Amplitude ist, wird $\frac{du}{dt} = 0$; also:

$$0 = 2\lambda^2 \cos a + C$$

hieraus:

$$C = -2\lambda^2 \cos a$$

folglich ist:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\lambda^2 (\cos u - \cos a)$$

$$\lambda dt = \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos a)}}$$

$$\lambda t = \int \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos a)}}$$

Unsere Aufgabe ist hier die Schwingungsdauer zu bestimmen, wir erhalten sie wenn wir das Integral zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ bestimmen, nennen wir sie $\frac{1}{2}$ T, so ist:

$$\lambda T = \int_{-a}^{+a} \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos a)}}$$

Es ist dies ein Elliptisches Integral, welches wir auf die Normalform zurückführen müssen; wir können dies indem wir setzen:

$$\cos u = 1 - 2\sin^2\frac{u}{2}$$

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

also:

$$\lambda T = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \frac{du}{\sqrt{\sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{u}{2}}}$$

führe ich nun durch die Gleichung

$$\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\varphi$$

die neue Variable φ ein; so verändere ich auch die Grenzen des Integrals; und zwar sind diese dem $u = a$ entsprechend $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und statt $u = -a$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; durch Einführung dieser neuen Variable haben wir in das Integral zu setzen:

$$du = \frac{2 \sin\frac{a}{2} \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{a}{2} \sin^2\varphi}}$$

und

$$\sqrt{\sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{u}{2}} = \sin\frac{a}{2}\cos\varphi$$

also ist:

$$\lambda T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\varphi}}$$

Der Werth des Integrals verändert sich nicht, wenn ~~es in zwei zerlegt wird, deren Summe~~ man es zuerst zwischen den Grenzen $+\frac{\pi}{2}$ und 0, dann zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ bestimmt; und diese Integrale addirt; da es ist nicht schwer zu begreifen dass:

$$(4) \ldots\ldots \qquad \lambda T = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\varphi}}$$

Wir haben hierdurch das Integral in ~~Form~~ der Normalform eines ganzen Ellyptischen Integral's dargestellt, zu dieser weiteren Behandlung könnten wir berechnete Tafeln benützen – man kann aber die Integration auch auf folgende Weise behandeln. ~~Wir~~ Zweck dieser Untersuchung ist die Theorie so weit als möglich, mit den Bedingungen ausführbarer

Versuche in Einklang zu bringen; es steht in der Macht des Experimentators, die Amplitude sehr klein zu wählen; so dass in dem nach dem binomischen Lehrsatz entwickelten Ausdrucke des Nenners von (4), nur folgende Glieder zu berücksichtigen seien:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \quad m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

$$\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\varphi$$

das nächste Glied, würde $\sin\frac{a}{2}$ schon in der 4ten Potenz enthalten; der Fehler, den wir durch seine Vernachlässigung begehen ist also sehr gering. –

Demnach ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\varphi\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\, d\varphi$$

Da

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

so ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Setzt man diese Werthe in (4) ein:

$$\lambda T = 2\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\sin^2\frac{a}{2}\right\}$$

oder

$$\lambda T = \pi\left\{1 + \frac{\pi}{4}\sin^2\frac{a}{2}\right\}$$

Als Näherungsformel ist also:

$$(5) \ldots\ldots \quad T = \frac{\pi}{\lambda}\left\{1 + \frac{a^2}{16}\right\}$$

~~Bezeichnet man~~ Diese Gl. geht für unendl. kleine Amplituden, d. i. für vernachlässigbare Werthe von a in (3) über — es ist also wenn T_0 die Schwingungsdauer bei der unendl. kleinen α, T_a die bei der endlichen Amplitude bezeichnet

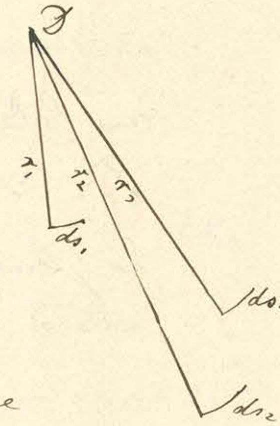
$$T_0 = \frac{\pi}{\lambda}$$

so

$$T_a = T_0\left\{1 + \frac{a^2}{16}\right\}$$

3. Hülfssatz für die Behandlung des zusammengesetzten Pendels. –

Es seien eine Anzahl zu einem festen Systeme verbundener Punkte 1 2 3 um die Axe X gedreht; wir wollen die Bedingung aufstellen, dass die ~~dass diese~~ relative Lage der Punkte ~~fest mit einander verbunden sind~~ unverändert bleibe ~~Punkte fest mit einander verbunden sind~~, dass sie also dieselbe Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung haben. – ~~Ersicht~~ Wenn der Radius Vector eines Punktes in der Zeit t den Winkel u beschreibt, so ist



die Winkelgeschwindigkeit : $\frac{du}{dt}$

die Winkelbeschleunigung : $\frac{d^2u}{dt^2}$

Die Punkte 1, 2, 3 etc. werden im Zeitraume dt die Strecken ds_1, ds_2, ds_3 ..... etc zurücklegen; sollen sie ihre gegenseitige Lage nicht verändern, so muss:

$$ds_1 = r_1\,du \qquad ds_2 = r_2\,du \qquad ds_3 = r_3\,du \quad \ldots\ldots$$

$$\frac{ds_1}{dt} = r_1\frac{du}{dt} \qquad \frac{ds_2}{dt} = r_2\frac{du}{dt} \qquad \frac{ds_3}{dt} = r_3\frac{du}{dt} \quad \ldots\ldots$$

oder nochmals differenziert

$$\frac{d^2s_1}{dt^2} = r_1\frac{d^2u}{dt^2} \qquad \frac{d^2s_2}{dt^2} = r_2\frac{d^2u}{dt^2} \quad , \ldots\ldots\ldots$$

Also ist die Bedingung der ~~con~~ gleichen Winkelgeschw. verschiedener Punkte durch die Relation dargestellt:

$$\frac{d^2s_1}{dt^2} : \frac{d^2s_2}{dt^2} : \frac{d^2s_3}{dt^2} : \ldots\ldots = r_1 : r_2 : r_3 : \ldots\ldots \qquad (6)$$

Es sollen nun auf die Punkte 1, 2, 3 mit den Massen m_1, m_2, m_3 in der Richtung ihrer Bewegung die

Kräfte R_1 R_2 R_3 wirken. –
Wir nehmen dass diese Punkte frei von einander sind, und wollen zeigen dass auch die Bewegungsgleichungen den Relationen (6) genügen können. –
Für die Bewegung freier Punkte giebt die Mechanik die Gleichungen:

$$m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = R_1$$
$$m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = R_2$$
$$\dots\dots\dots$$

also:

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{R_1}{m_1}$$
$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{R_2}{m_2}$$
$$\dots\dots$$

Wenn nun die Punkte ihren ursprünglichen Relationen also den (6) genügen sollen, so muss

$$\frac{R_1}{m_1} : \frac{R_2}{m_2} : \dots = r_1 : r_2 : \dots$$

dann ist es nur:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = f m_1 r_1 \\ R_2 = f m_2 r_2 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Hier haben wir den unbekannten Factor f eingeführt; und wir haben nun eine unbekannte mehr als Gleichungen — aus diesem ~~Übelstande hilft uns~~ verlegenheit befreit uns ein Satz der Mechanik, welcher sagt:

$$D = R_1 r_1 + R_2 r_2 + R_3 r_3 + \ldots\ldots \qquad (8)$$

d. i. dass, das Drehungsmoment eines System's von Punkten, gleich ist der Summe der Drehungsmomente der einzelnen Punkte. —

Aus (7) und (8) lassen sich nun R_1 R_2 … etc und f vollständig bestimmen. —

Wir haben hiermit bewiesen dass die Bewegung zu einem Systeme fest verbundener Punkte, als die Bewegung ~~frei~~ freier Punkte betrachtet werden kann, die ihre gegenseitige Lage nicht verändern. —

Aus (7) und (8) folgt:

$$D = f\left\{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\right\}$$

mit Hülfe von (7) f eliminirt:

$$R_1 = \frac{m_1 r_1 . D}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots}$$

Da nun:

$$\frac{R_1}{m_1} = \frac{d^2 s_1}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 s_1}{dt^2} = r_1 \frac{d^2 u}{dt^2}$$

so ist:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{D}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\dots}$$

Man bezeichnet in der Mechanik

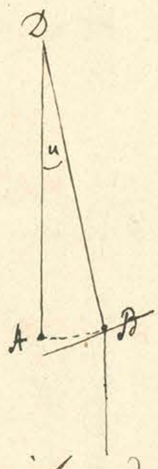
(9) .... $M = m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\dots$

und nennt M das Trägheitsmoment des Systems ~~von Punkten~~ der Punkte 1, 2, 3 etc.

„Die ~~Winkel~~ Beschleunigung der Winkelgeschwindigk. eines Körpers ist gleich ~~seinem~~ dem Verhältniss seines Drehungsmomentes, zu seinem Trägheitsmoment".

(10) ...... $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{D}{M}$

4. Die Länge des einem physischem Pendel correspondirenden einfachen Pendels. -



Sei AD die Lage eines physischen Pendels zur Zeit $t=0$, DB die Lage zur Zeit $t=t$. - Der Schwerpunkt des Pendels sei A resp. B; die constante Entfernung desselben von der Drehungsaxe D sei gleich s; dann ist, da die Componente der Kraft (die Schwere des Pendels) in der Richtung der Bewegung $P.\sin u$ ist;

das Drehungsmoment des Pendels:

$$D = -S.P.\sin u$$

Das negative Vorzeichen rührt davon her, dass die in positiver Richtung wirkende Kraftcomponente den Winkel u verkleinert. –

Nach dem im Vorigen besprochenen Satze, ist dann, die Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{SP\sin u}{M}$$

Statt P kann ich die Masse M des Pendels einführen, und da die Schwere gleich ist dem Gewichte der Masseneinheit, so ist

$$P = Mg \quad \text{und:}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -g.\frac{SM}{M}\sin u \quad \ldots\ldots (11)$$

für die Beschl. der Winkel Geschw. des einfachen Pendels fanden wir den Ausdruck

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -g.\frac{1}{l}\sin u \quad \ldots\ldots (1)$$

beide Gleichungen werden identisch wenn man setzt:

$$\frac{SM}{M} = \frac{1}{l} \quad \text{also:}$$

$$l = \frac{M}{SM} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Die Integrale dieser identischen Gleichungen (1) und (11)

~~sind auch~~, welche zum Ausdrucke der Schwingungsdauer führen werden auch identisch sein — es haben also die zwei Pendeln auf deren eine sich Gleichung (1) und auf die andere Gleichung (2) bezieht dieselbe Schwingungsdauer. — Dieses einfache Pendel, welches mit einem zusammengesetzten Pendel dieselbe Schwingungsdauer hat, nennt man sein correspondirendes Pendel — die Länge desselben ergiebt sich aus (12). —

Kennen wir daher die Länge des correspondirenden Pendels, so können wir die Gesetze der Bewegung des Zusammengesetzten — bei der Bestimmung derselben, müssen wir das Trägheitsmoment bestimmen können; wozu wir einen Satz der Mechanik ~~brauchen~~ ableiten. —

Wir nennen M das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Axe; μ das Trägheitsmoment desselben Körpers in Bezug auf eine der ersten parallele, durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe. —

Ich lege nun in den Schwerpunkt des Körpers ein rechtwinkl. Coord. System, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt selbst ist, und dessen z Axe mit der Axe zusammenfällt auf welche sich μ bezieht. — Die Entfernung irgend eines Punktes von der Rotationsaxe ist in diesem Coord. Syst. $= \sqrt{x^2+y^2}$; also wenn m die Masse des Theilchens ist

$$\mu = \sum m(x^2+y^2)$$

Jetzt legen wir ein dem ersten paralleles System. Der Anfangspunkt des erst' betrachteten System's habe in diesem die Coord. a und b; und die Coordinaten irgend eines Punktes des rotirenden Körpers sein x' y'; also die Entfernung eines Punktes von ~~dieser~~ Drehungsaxe von M stellt sich dar: $\sqrt{x'^2+y'^2}$; und

$$M = \sum m(x'^2+y'^2)$$

worin
$$x' = x+a$$
$$y' = y+b$$

also:

$$M = \sum m\left\{(x+a)^2+(y+b)^2\right\}$$

$$= \sum m(x^2+y^2) + \sum m(a^2+b^2) + 2a\sum mx + 2b\sum my$$

Da nun $\sum m = M$ = die Masse des ganzen Körpers und $\sqrt{a^2+b^2}$ gleich der Entfernung des Schwerpunktes von der beliebigen Drehungsaxe $= \delta$ ist, da ferner:

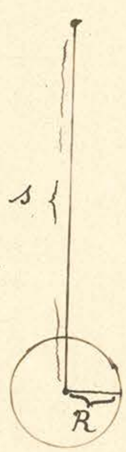
$$\sum mx = M x_0 \qquad \sum my = M y_0$$

wo x_0, y_0 die Coordinaten des Schwerpunktes sind, in dem man sich die ganze Masse concentrirt denken kann; wobei der Schwerpunkt der Anfangspunkt, also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ist, so folgt:

$(13) \ldots\ldots M = \mu + M.S^2$

Wir können also das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Axe immer reduciren auf das Trägheitsmoment in Bezug auf eine ihr parallele aber durch den Schwerpunkt gehende Axe.–

5. Das aus einer schweren Kugel, und einem gewichtslosen Faden zusammengesetzte Pendel.–



Die Kugel sei von homogener Masse; ihr Schwerpunkt sei also ihr Mittelpunkt; ihr Radius sei R, ihre Entfernung vom Aufhängungspunkte s, ihre Masse m; dann ist die Länge des correspondirenden einfachen Pendels (die wir zur Kenntnis der Bewegung allein aufzusuchen haben) nach der Gleichung (12):

$$l = \frac{M}{m.s}.$$

Es ist nun M zu bestimmen; also vor allem μ das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gelegte Axe.–

Bei dieser Gelegenheit werden wir die Formel für das Trägheitsmoment irgend eines Rotationskörpers ableiten.–

Wir führen zu diesem Zwecke ein rechtwinkl. Coord. System ein, dessen z Axe mit der Drehungsaxe, und dessen Anfangspunkt mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt, ein Raumelement ist dann $dx\,dy\,dz$, und wenn ρ die Dichtigk. bedeutet die wir im ganzen Körper ~~gleichmässig verbreitet~~ constant annehmen wollen, so ist das Trägheitsmoment dieses Elementes:

$$\rho\, dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2)$$

Mithin ist das Trägheitsmoment des ganzen Körpers:

$$\mu = \rho \iiint dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2)$$

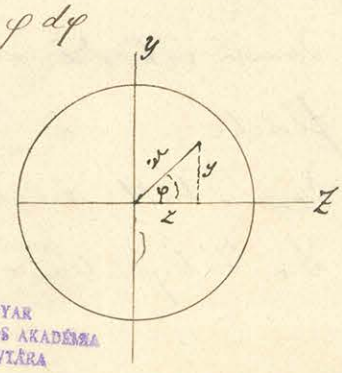
Dieser Ausdruck ~~für ein~~ besteht für jeden beliebig geformten Körper, ich will aber jetzt ~~die Bedingung~~ ~~einführen~~ annehmen, dass dieser ein Rotationskörper sei, dessen Rotationsaxe etwa mit der x Axe zusammenfallen soll. – Ich führe dann Polarcoordinaten ein

$$y = r.\sin\varphi \qquad dy = r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$z = r.\cos\varphi \qquad dz = -r\sin\varphi\, d\varphi$$

also:

$$\mu = \rho \iiint dx\, r\,dr\,d\varphi\,(x^2 + r^2\sin^2\varphi)$$



Die Integration in Bezug auf φ ist zwischen den Grenzen 2π und 0 auszuführen, ~~da das Integral~~ also:

$$\mu = \varrho \iiint_0^{2\pi} (x^2 + r^2 \sin^2\varphi)\, dx . r dr . d\varphi$$

oder:

$$\mu = \varrho \left\{ \iiint_0^{2\pi} x^2 dx\, r dr d\varphi + \iiint_0^{2\pi} r^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, dr\, dx \right\}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$$

Wir fanden ja auf Seite 29

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

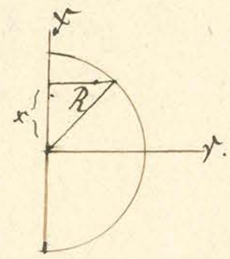
Demnach ist:

$$\mu = 2\pi\varrho \iint dx\, r dr \left(x^2 + \frac{r^2}{2}\right)$$

x und r sind die Coordinaten eines Punktes in der Fläche durch deren ganze Umdrehung der Rotationskörper entstehen soll. –

Wir beschränken uns auf den Fall einer Kugel – dann ist die rotierende Fläche eine Halbkreisfläche – die Rotationsaxe die Diagonale – in diesem Fall auch die x Axe. –

Die Integration ist also auszuführen in Bezug auf x von $+R$ bis $-R$; und in Bezug auf r von $r=\sqrt{R^2-x^2}$ bis $r=0$; wo R den Radius des Kreises bezeichnet. –



Das Integral ~~ist~~ nach r ausgeführt giebt:

$$\mu = 2\pi\varrho \left[\int dx \left(x^2 \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right) \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-x^2}}$$

Setzt man die Grenzen ein:

$$\mu = 2\pi\varrho \int dx \left(\frac{x^2(R^2-x^2)}{2} + \frac{(R^2-x^2)^2}{8} \right)$$

$$\mu = \frac{\pi\varrho}{4} \int_{-R}^{+R} dx \left(R^4 + 2R^2x^2 - 3x^4 \right)$$

Nach x integrirt:

$$\mu = \frac{\pi\varrho}{4} \left[R^4 x + \frac{2}{3} R^2 x^3 - \frac{3}{5} x^5 \right]_{x=-R}^{x=+R}$$

Da hier nur ungerade Potenzen von x vorkommen so ist der Werth des Integrals für $x=-R$ der negative Werth desselben für $x=+R$; da dieser erstere negativ genommen werden soll, so ist das ganze bestimmte Integral das Doppelte Werth des Integrals für $x=+R$ also:

$$\mu = \frac{8\pi\varrho}{15} R^5$$

Es ist dies der Ausdruck für das Trägheitsmoment ~~in~~ einer Kugel in Bezug auf jede durch ihren Mittelpunkt gehende Axe. –

Die Masse $\underline{m}$ der Kugel ist:

$$m = \varrho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$$

und demnach:

$$(14) \ldots\ldots\ldots \quad \mu = \frac{2}{5} \cdot m R^2$$

Die Länge des ~~..~~ diesem behandelten Pendel correspondirenden einfachen Pendels ergiebt sich dann, wenn wir in Gleichung (12) einsetzen

$$M = m\left(\frac{2}{5} R^2 + s^2\right)$$

also:

$$(15) \qquad l = s + \frac{2}{5} \frac{R^2}{s}$$

Wenn R unendlich klein wird so ist $l = s$, es ist dies der Fall des einfachen Pendels. –

6. Berücksichtigung der Masse des Fadens. –

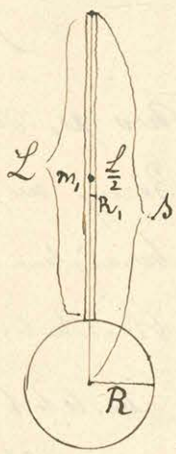
Um uns noch unabhängiger von den Voraussetzungen zu machen, die bei der Behandlung des einfachen Pendels zu berücksichtigen waren – nehmen wir an, dass der Faden an dem das Pendel aufgehängt ist

Theor. Physik 3

ein kreisförmiger Cylinder mit dem Radius R_1 sei; in welchem die Masse m_1 gleichförmig vertheilt ist, die Länge desselben sei L, also die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Drehungsaxe $\frac{L}{2}$.-

~~Nach~~ Es ist ferner:

$$s - L = R$$



Nach (12) erhalten wir die Länge des correspondirenden einfachen Pendels aus der Gleichung:

$$l = \frac{M + M_1}{MS} \quad \ldots (16)$$

Worin M wie vorher das Trägheitsmoment der Pendelkugel, M_1 das Trägheitsmoment des Fadens bedeutet.-

Die Mechanik lehrt dass wenn sich die Schwerpunkte mehrerer Massen m_1 m_2 m_3 etc, in derselben Geraden ~~mit ihre~~ vertical auf ihre Drehungsaxe in den Entfernungen s_1 s_2 etc befinden; so ist:

$$MS = m_1 s_1 + m_2 s_2 + m_3 s_3 + \ldots\ldots$$

Demnach ist in dem vorliegenden Falle

$$MS = ms + m_1 \frac{L}{2}$$

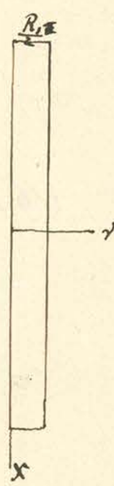
Wir haben noch den Zähler zu bilden, im vorigen ergab sich schon:

$$M = m(\delta^2 + \tfrac{2}{5}R^2)$$

und nach (13) ist:

$$M_1 = \mu_1 + m_1 \frac{L^2}{4}$$

wo μ_1 das Trägheitsmoment des Fadens bezeichnet in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe bezeichnet: – Ein Cylinder kann als durch Rotation eines Rechteckes entstanden betrachtet werden, demnach besteht für diesen Fall die auf Seite 40 festgestellte Gleichung



$$\mu = 2\pi\varrho \iint dx\, r\,dr \left(x^2 + \frac{r^2}{2}\right)$$

Wir erhalten μ_1 indem wir das Integral ~~zwischen den Gränzen~~ in Bezug auf x zwischen den Grenzen $-\frac{L}{2}$ und $+\frac{L}{2}$, und in Bezug auf r zwischen den Grenzen 0 und R_1 ausführen.

$$\mu_1 = 2\pi\varrho \int r\,dr \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x r^2}{2}\right)_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}}$$

$$\mu_1 = 4\pi\varrho \int_0^{R_1} r\,dr \left(\frac{L^3}{24} + \frac{L r^2}{4}\right)$$

Nach r integrirt:

$$\mu_1 = 4\pi\varrho\left(\frac{r^2L^3}{48} + \frac{Lr^4}{16}\right)_0^{R_1}$$

$$\mu_1 = \pi\varrho R_1^2 L\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R_1^2}{4}\right)$$

$$\mu_1 = \frac{\pi\varrho_* R_1^2 L}{12}\left(L^2 + 3R_1^2\right)$$

da die Masse des Fadens

$$m_1 = \pi\varrho R_1^2 L$$

so ist

$$\mu_1 = m_1\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R_1^2}{4}\right)$$

und wir haben

$$M_1 = m_1\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R_1^2}{4}\right)$$

Setzen wir die gefundenen Werthe von Ms, M und M_1 in (16) ein, so ergiebt sich die Länge des correspondirenden einfachen Pendels:

$$l = \frac{m(s^2 + \frac{2}{5}R^2) + m_1\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R_1^2}{4}\right)}{ms + m_1\frac{L}{2}}$$

oder:

$$l = \frac{s^2 + \frac{2}{5}R^2 + \frac{m_1}{m}\left(\frac{L^2}{3} + \frac{R_1^2}{4}\right)}{s + \frac{m_1}{m}\frac{L}{2}} \quad \ldots\ldots (17)$$

Wird die Masse des Fadens unendlich klein, so reducirt sich dieser Ausdruck zu dem Ausdrucke (15), welcher die ~~Länge~~ Länge des einfachen Pendels giebt, dessen Faden massenlos ist.–

Haben wir ein Pendel, das von mehreren von verschiedenen Stoffen bestehenden Theilen zusammengesetzt ist; so können wir ähnliche Rechnungen durchführen – angenommen dass die ~~einzelnen~~ Masse innerhalb der Theile ~~von~~ homogen~~er~~ ist ~~Masse bestehen~~. –

7. Das Reversionspendel. –

Bei den bis jetzt betrachteten ~~Fällen~~ Pendeln, war Homogenität derselben eine wesentliche Bedingung. – Es ist dies eine Bedingung welche schwer zu erfüllen ist, um sich also von ihr unabhängig zu machen hat Bohnenberger ein sogenanntes Reversionspendel construirt; er und hauptsächlich der Engländer Kater benützten diese Methode zu möglichst genauen Messungen. – Dieses Pendel ~~besteht~~ hat zwei Schneiden die genau parallel sein müssen, ausserdem muss der Schwerpunkt des ganzen Pendels in der durch sie gelegten Ebene liegen. – Seien s_1 und s_2 die Entfernungen des Schwerpunktes S von den beiden Schneiden; l_1 und l_2 die Längen der enrespondirenden einfachen Pendels, je nachdem das Reversionspendel auf der Schneide 1 oder 2 schwingt; T_1 und T_2 die den Pendellängen l_1 und l_2 entsprechenden Schwingungsdauer, und μ das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende den Schneiden parallele Axe. – Ist endlich m die Masse des Pendels so hat man:

$$l_1 = \frac{\mu + m s_1^2}{m s_1}$$

$$l_2 = \frac{\mu + m s_2^2}{m s_2}$$

oder

$$s_1 l_1 = \frac{\mu}{m} + s_1^2$$

$$s_2 l_2 = \frac{\mu}{m} + s_2^2$$

hiernach:

$$s_1 l_1 - s_2 l_2 = s_1^2 - s_2^2 \quad \ldots\ldots (18)$$

da ferner für unendlich kleine Amplituden:

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$T_2 = \pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

also

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Kann man nun durch Verschiebung der bleiernen Linsen, welche am Reversionspendel angebracht sind, es dazu bringen dass $T_1 = T_2$, so folgt auch $l_1 = l_2 = l$, also aus (18)

$$(20) \quad \ldots\ldots \quad l = s_1 + s_2$$

das heisst, wenn das Pendel auf beiden Schneiden gleich schnell schwingt, so ist die Länge des correspondirenden einfachen Pendels gleich der Entfernung der beiden Schneiden. – Es darf aber dabei nicht $s_1 = s_2$ sein, da in diesem Falle der Ausdruck (18) unbestimmt wird. –

8. – Einfluss des Luftwiederstandes auf die Bewegung von Pendeln. –